EXAMEN DE REPASO

1)

a) Base de los vectores $\mathbb{R}^3 \{ (1,2,1)(0,-1,1)(1,0,1)(3,0,3) \}$

* No son base porque hay 4 vectores en $\mathbb{R}^3$ no so L.I, luego no son base.

b) Calcula las ecuaciones del subespacio vectorial generado por $\mathcal{L}(v_1, v_2)$ indicando dimensión y base del mismo.

c) Calcula el valor de a para que $(2,2,a)$ pertenezca al subespacio anterior.

a) $$rg \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 3 = Dim(\mathbb{R}^3)$$

Det $1+1=2$

Por los teoremas de la base, este conjunto de vectores es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$

($Rg = 3 \Rightarrow$ 3 vectores lineal Indep, en $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ Esos 3 son base)

b) $$rg \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 = Dim\ L$$

Al ser 2, sabemos que son base $B\{(1,2,1)(0,-1,1)\}$

$L = \mathcal{L}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$

- Creación de ecuaciones:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & -1 & y \end{vmatrix} \Rightarrow 2x - 2 - y + x = 0 \Rightarrow \boxed{3x - y - z = 0}$$

c) Con la ecuación sólo tengo que sustituir con el vector que tengo.

$$(2,2,a) \longrightarrow 3x - y - z = 0$$

$$3 \cdot 2 - 2 - a = 0 \Rightarrow 4 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 4}$$

2) Dada una transformación lineal con matriz asociada $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

• Estudie si es diagonizable y en caso de serlo exprese la relación entre A y su matriz diagonal semejante. Calculando la matriz de paso "P"

• Calcular autovalores.

$$|A \cdot \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \text{ (doble)} \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

Si todos los valores fueran distintos sería Diagonizable

* para $\lambda_1 = 1$

$$rg(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-1 & 2 & 2 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 0 & 1 & 2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Si este Rg fuera 2, No sería diagonizable xq no daría con $\mathbb{R}^3$

$$Dim(L(\lambda_1)) = \underset{\mathbb{R}^3}{3} - 1 = \boxed{2}$$

* para $\lambda_2 = 2$

$$\begin{vmatrix} 1-2 & 2 & 2 \\ 0 & 1-2 & 0 \\ 0 & 1 & 2-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$Dim(L(\lambda_2)) = 3 - 2 = \boxed{1}$$

continuación 2) $\boxed{A = PDP^{-1}}$

Calculo "P" (auto vectores)

* $\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{2} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

proporcional

$$\Rightarrow 0 + y + z = 0 \Rightarrow \boxed{y = -z}$$

$$\begin{cases} x = \beta \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \qquad B \cdot \{(1,0,0)\,(0,-1,1)\}$$ ← son 2 porque su Dim = 2

* $\lambda_2 = 2$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y + 2z = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2z} \\ -y = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0} \end{cases}$$

proporcional

$$\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases} \qquad B\ \{(2,0,1)\}$$ ← sólo 1 porque su Dim "1"

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{P} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{P^{-1}}$$

3. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + xy + xz$

a) Estudie su comportamiento y tendencia en el $P(1,1,1)$ y en la dirección del vector $(1,-2,1)$

b) Halle los puntos críticos de f y clasifícalos.

a) $f'_{\vec{v}}(1,1,1) = 2\cdot 1 + 3\cdot(-2) + 3\cdot 1 = -1 < 0 =$ Decreciente

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 + y + z \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)\ 2\cdot 1 - 2 + 1 + 1 = 2 - 2 + 1 + 1 = \boxed{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = 2\cdot 1 + 1 = \boxed{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z + x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = 2\cdot 1 + 1 = \boxed{3}$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dirección ... Matriz de vector

$$f''_{\vec{v}}(1,1,1) = (1,-2,1)\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ → Dirección en columna

$$= [1\ \ -3\ \ 3]\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 10 > 0 \Rightarrow$$ Decreciente Decelerado.

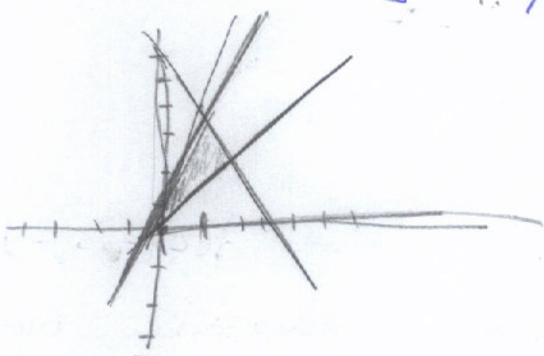
$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \left.\begin{aligned} H_1 &= 2 > 0 \\ H_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \\ H_3 &= |H| = 8 - 4 = 4 > 0 \end{aligned}\right\} \text{Definida positiva} \Rightarrow \underline{\text{Mínimo}}$$

4.

a) $$\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx \Rightarrow \int \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C$$

b) $$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx = \int (\operatorname{sen} x)^{-1/2}$$

5. Calcular el area comprendida entre las funciones $y = 6x$, $y = x^2$, $y = 8 - 2x$



$6x = 8 - 2x$

$8x = 8 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

$-x^2 - 2x + 8 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{-2} = \begin{cases} -4 \\ \boxed{2} \end{cases}$$

$$\int_0^1 6x - x^2\,dx + \int_1^2 8 - 2x - x^2\,dx = \left(6\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 + \left(8x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2$$

MATEMATICAS.

Operación Interna: Cuando la operación de un grupo y el resultado son del mismo grupo. Ej: $N + N = N$; N = Números Naturales.

Operación Cerrada: Cuando sólo tiene 1 resultado a la operación.
Ej: SUMA.
*NOTA: La división no es cerrada porque me da cociente y Resultado.

Asociativa: La suma, sólo suma de dos en dos. Yo le doy dos n números y me devuelve 1. Cuando tengo más utilizo la asociativa.

Elemento opuesto: Es el número que hace "0" a mi ecuación
Ej: $a + \underbrace{\boxed{?}}_{-a} = 0 = \underbrace{\boxed{?}}_{-a} + a$

$(\boxed{K}, \boxed{+}, \boxed{\cdot}) \rightarrow$ Conjunto cerrado e Interno

Elemento Suma Multiplicación

$\mathbb{R} = K$ $\qquad$ $\mathbb{R}^2_{(1,2)} = V$

$\sqrt{3} \cdot (1,2) = (\underbrace{\sqrt{3} \cdot 1}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{\sqrt{3} \cdot 2}_{\in \mathbb{R}}) \in \mathbb{R}^2$

La suma de dos vectores (v) es un vector (w)

$(k + k') \cdot v = \underbrace{k \cdot v}_{w} + \underbrace{k' \cdot v}_{w'} = w + w' \in V$

$(2 \cdot 3) \cdot (1,2) = (6,12) = 2 \cdot (3,6) = 2 \cdot (3 \cdot \underbrace{(1,2)})$

$(0,0) \longrightarrow$ Vector 0

$$\boxed{V = (1, 2) \in \mathbb{R}^2}, \quad \boxed{(-V) = (-1, -2) \in \mathbb{R}^2}$$

VECTOR — VECTOR OPUESTO

- $k \cdot (-v)$

$3 \cdot (-1, -2) = (-3, -6)$

- $(-k) \cdot v$

$(-3) \cdot (1, 2) = (-3, -6)$

- $k = 3$

- $(-k \cdot v)$

$-(3(1,2)) = -(3, 6) = (-3, -6)$

- Combinación lineal de vectores

$$\underbrace{\boxed{(1, 2)}}_{v} = \underbrace{\boxed{2 \cdot (1, 3)}}_{v_1} + \underbrace{\boxed{(-1)\ (1, 4)}}_{v_2}$$

- Un vector es linealmente dependiente sí alguno de los números es $\neq 0$

$$k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 \ldots k_n \cdot v_n = 0$$

$$V = \frac{k_2}{(-k_1)} v_2 + \frac{k_3}{(-k)} v_3 + \ldots + \frac{k_n}{(-k)} v_n$$

EJEMPLO:

Este conjunto $\{(-1, 2) - (1, 1) - (3, 5)\}$ ¿Es linealmente independiente ó dependiente?

Sí $k(-1, 2) + \beta(1, 1) + h(3, 5) = 0$

Sí $\boxed{h, \beta, k} \in \mathbb{R}$

→ OTRA MANERA

$(1,1) = k_1 \cdot (-1,2) + k_2 (3,5)$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = -k_1 + 3k_2 \\ 1 = 2k_1 + 5k_2 \end{array}\right\} \quad \boxed{\begin{array}{l} k_1 = \frac{2}{11} \\ k_2 = -3/11 \end{array}} \rightarrow$$

Son las coordenadas de $v(1,1)$ respecto a los vectores $(1,2)$ $(3,5)$

$$(1,1) = \frac{-2}{11}(-1,2) + \frac{3}{11}(3,5)$$

$$\boxed{V = k_1 V_1 + k_2 V_2 \Rightarrow K_1, k_2 \neq 0}$$

• Si meto los vectores en una matriz, el Rango te dice que número de vectores tiene linealmente dependientes

$$M \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0$$

Rango $(M) = 2$ ← Tiene 2 vectores linealmente dependientes

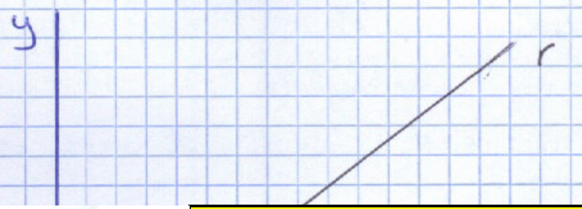
SISTEMA GENERADOR

$\{V_1, V_2, V_3 \ldots V_n\}$ → Base de un Espacio Vectorial

$\{V_1, V_2, V_3 \ldots V_n\}$ son base del espacio vectorial de V sí y sólo sí $\{V_1, V_2 \ldots V_n\}$ es un sistema generador de V y si no se repiten $\{V_1, V_2, V_3 \ldots V_n\}$, es decir, que sean linealmente Independientes.

- Si sale DEPENDIENTE ⟶ NO BASE
- Si sale INDEPENDIENTE ⟶ BASE

• ESPACIO VECTORIAL "r"



• Como puedo hayar el $(2,2)$ del $(1,1)$

$$(1,1) = \frac{1}{2}(2,2)$$

$\{(1,1)\ (2,2)\}$ → Conjunto de vectores linealmente Dependientes

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ → Cojo un menor $|1| = 1 \neq 0$ → Es linealmente Independiente.

• Base de $r = \{(1,1)\}$

A partir de mi base ya puedo crear todo el espacio vectorial.

$$(2,2) = 2(1,1)$$

$$(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{3}(1,1)$$

$$(-2,-2) = -2(1,1)$$

* Para sacar la coordenada, Tengo que hacer el sistema entre el vector Base y el vector $(2,2)$. Tengo que poner el vector como combinación lineal.

• ¿Cuales son las coordenadas de $(4,4)$ con la Base $(1,1)$

$$(4,4) = \alpha \cdot (1_1, 1_2)$$

$$4 = \alpha \cdot 1_1 \longrightarrow \alpha = 4 \cdot 1_1 \Rightarrow \alpha = 4$$

$$4 = \alpha \cdot 1_2 \longrightarrow \alpha = 4 \cdot 1_2 \Rightarrow \alpha = 4$$

• ¿Cuales son las coordenadas de $(3,2)$ con la Base $\{(0,-1)(1,1)\}$

$$(3,2) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(0,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3 = \alpha_1 \cdot 1 + 0\alpha_2 \\ 2 = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2(-1) \end{array}\right\}$$

$$\alpha_1 = 3 \qquad \alpha_2 = 1$$

coordenada $(3,1)$

→ Sistema compatible determinado

→ Si el sistema no tiene solución, el vector no habita en el espacio vectorial.

cualquier vector.

Base = Sistema Generador ...

Vectores linealmente independientes

EJERCICIO.

- Dado el conjunto $\{(-1,2)(1,1)(3,5)\}$

• Halle las coordenadas del vector $(0,1)$ respecto de dichos valores.

$(0,1) = \alpha_1(-1,2) + \alpha_2(1,1) + \alpha_3(3,5)$

$$\begin{cases} 0 = \alpha(-1) + \alpha_2(1) + \alpha_3 \cdot 3 \\ 1 = 2\alpha + \alpha_2 + 5\alpha_3 \end{cases}$$

• SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO.

• Demuestre que $\{(-1,2),(1,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^2$

$B_r = (-1,2),(1,1) \rightarrow (a,a^2) = \alpha(-1,2) + \alpha_2(1,1)$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \qquad Rg\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = -\alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_2 \\ 1 = 3\alpha_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha_1 = (1/3) \\ \alpha_2 = (1/3) \end{array}$$

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \rightarrow (0,1) = \frac{1}{3}(-1,2) + \frac{1}{3}(1,1) \quad \alpha_2 = 1/3$$

• La cantidad de vectores que necesito para formar la base, cualquier base formada por x, esas veces es la misma cantidad.

BASE CANONICA O ESTANDAR

Es la base que esta formada por unos vectores que tienen "1" en alguna coordenada y el resto de coordenadas son "0". Y a esos les llamo E_1, E_2, E_3 dependiendo donde este colocado el "1"

$$\boxed{\begin{array}{l} B_{canonica}\ \{(1,0)\ (0,1)\} = \{(\varepsilon_1)\ (\varepsilon_2)\} \\ (3,7) = 3\cdot(1,0) + 7\cdot(0,1) \end{array}}$$

DIMENSIÓN: Número de vectores de la Base → ES UNICA

Base $\{$ - Conjunto de vectores

EJERCICIOS ALGEBRA LINEAL.

EJERCICIO 2.

$v_1 = (1, 2, a, 1)$ $\quad v_2 = (a, 1, 2, 3)$ $\quad v_3 = (0, 1, b, 0)$

a) Determine a y b para que los tres vectores sean linealmente dependientes

$$M \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ a & 2 & b \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

* Hay 3 vectores linealmente dependientes

Sí todos los menores de orden 3 = 0

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ a & 2 & b \end{vmatrix} = b + a^2 - 2ab - 2 = 0$$

$$b + 3^2 - 6b - 2 = 0$$

$$\boxed{b = 7/5}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = a - 3 = 0 \quad \boxed{a = 3}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 7/5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 14/5 + 6 - 2 - 14/5 = \boxed{0}$$

EJERCICIO 4

a) Determine x e y para v_3 pertenezca al subespacio v_1 y v_2

b) Encuentre las ecuaciones de dicho subespacio.

$v_1 (1, 4, -5, 2)$ $\quad v_2 (1, 2, -3, 1)$ $\quad v_3 = (3, 2, x, y)$

$\mathbb{R}^4$

v_3 = combinación lineal v_1, v_2

v_3 = pertenece al espacio generado por v_1, v_2

$\{v_1, v_2, v_3\}$ son linealmente dependientes $\Rightarrow$ Rango $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} < 3$

$\boxed{\alpha_1 = 2}$

$\boxed{\alpha_2 = 5}$

Definición Espacio Vectorial: $v_1 + v_2 = v_3$

$k \cdot v_1 = v_2$

- Base espacio vectorial: $B_v = \{v_1, v_2 \ldots v_n\}$

  v_i son sistema Generador

  v_i son Linealmente Independientes

  Dimensión $V = n$

v_1, v_n son Linealmente Independientes sí y sólo sí la matriz formada por los vectores si su rango da el número "n".

Si me sale el número que no sea "n" tenemos que mirar todos los menores (1 menos q la matriz) y si uno no me sale diferente de "0" ese menor (es decir, sus vectores) son Linealmente Independientes y su rango es (si es una matriz de orden 4 pues es 4) el mismo que su orden.

Si todos me salen "0" sigo haciendo lo mismo de antes pero con los menores de los menores (1 menos que el menor de antes)

- Un Vector "w" que sea combinación lineal de $\{v_1 \ldots v_n\}$ que puedo afirmar que "w" pertenece a mi espacio vectorial

- Si vector "w" no es combinación lineal de $\{v_1 \ldots v_n\}$ es Linealmente Independiente.

- Cuando "w" lo expresas como combinación Lineal de $\{v_1 \ldots v_n\}$ y te salen las coordenadas de "w" respecto a la base $\{v_1 \ldots v_n\}$

ESERCICIO DE VECTORES.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Como son distintos de "0" son L I los vectores v_1, v_2, v_3

Como no hay menores de 4,

d) Calcula las coordenadas de un vector, respecto de una Base

$(2,-1,-3) = \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(0,2,1) + \alpha_3(1,0,1)$

$$\left.\begin{array}{l} 2 = \alpha_1 + \alpha_3 \\ -1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ -3 = \alpha_2 + \alpha_3 \end{array}\right| \begin{array}{l} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -2 \\ \alpha_3 = -1 \end{array}$$

$2 = \alpha_1 + \cancel{\alpha}_3 = \alpha_1 \quad 2 = 5 + 2\alpha_3 + \alpha_3 \longrightarrow -3 = 3\alpha_3 = \boxed{-1 = \alpha_3}$

$-1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \longrightarrow -1 = \alpha_1 - 4 \Rightarrow \boxed{3 = \alpha_1}$

$-3 = \alpha_2 + \alpha_3 \longrightarrow 2 + (-3 = \alpha_2 + \alpha_3)$

$-3 = \alpha_2 - 1 \qquad 5 = \alpha_1 = 2\alpha_3$

$\boxed{-2 = \alpha_2} \qquad 5 + 2\alpha_3 = \alpha_1$

SUBESPACIO VECTORIAL.

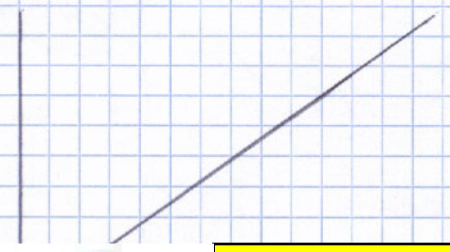
$\underbrace{F}_{\text{Sub espacio vectorial}} \ \underbrace{\subset}_{\text{contiene}} \ \underbrace{V}_{E.\ \text{vectorial}}$

$$\begin{array}{rl} & \text{Vector de subespacio} \\ + & \text{Vector de subespacio} \\ \hline & \text{VECTOR} \end{array}$$

- Cojo dos vectores de "S" (subespacio) hacemos la combinación lineal y si caen en "S" lo que tenemos es un Espacio Vectorial de "S".

- El subespacio "S" es el conjunto de vectores que salen de hacer la combinación lineal de los que he cogido.

- Si del subespacio vectorial tengo linealmente independiente lo que tengo es la base.



$B_F\ (1,1) \qquad V = \mathbb{R}^2$

$v_2 = (2,2) = 2(1,1)$

Las coordenadas de v_2 respecto de B_F son

Tengo el subespacio vectorial (F) dentro del Espacio ($\mathbb{R}^3$) generador por $\{e_1, e_2\}$

$F = (2, 1, 3) \in \mathbb{R}^3$ si fuera combinación lineal de $B_F = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$ formaría parte del plano. La dimensión de $F = 2$

$$(a_1, a_2, a_3) = \lambda(1,0,0) + \lambda_2(0,1,0)$$

$$(a_1, a_2, a_3) = (\lambda_1, \lambda_2, 0) \rightarrow \begin{cases} a_1 = \lambda_1 \\ a_2 = \lambda_2 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

U_1 respecto de $\mathbb{R}^3$ $(2,1,0) \in F$

$$(2,1,0) = \lambda(1,0,0) + \lambda_2(0,1,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \end{array}\right\} U_2' = (2,1)$$

$W = (-1, 2) \in F \longrightarrow$ lo quiero pasar a $\mathbb{R}^3$

- Cojo la $Base_F = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$

$$W = -1(1,0,0) + 2 \cdot (0,1,0) =$$
$$= (-1, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$$

EJERCICIO ALGEBRA LINEAL.

10. b) Calcule a y b para que el vector $(0,1,a,b)$ pertenezca al subespacio generado por los vectores: v_1 $(2,0,2,9)$ v_2 $(1,2,1,3)$ v_3 $(1,0,1,3)$ $v_4 = (2,4,2,6)$

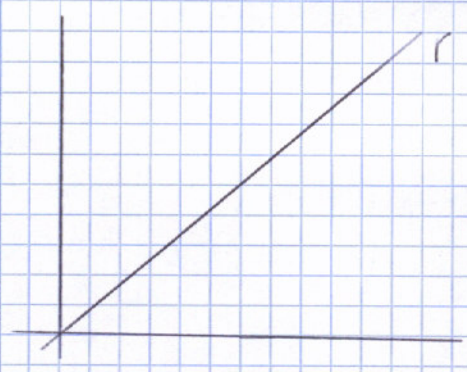
$$(0,1,a,b) = \lambda_1(1,2,1,3) + \lambda_2(1,0,1,3) + \lambda_3(2,4,2,6)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & a \\ 3 & 3 & 6 & b \end{vmatrix} = 0 \; ; \; 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 6 & b \end{vmatrix}}_{} + \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 6 & b \end{vmatrix}}_{} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3 & 3 & b \end{vmatrix} = 0$$

$$12a + 6 - 6 - 4b = 12a - 4b$$

$$4b + 12a + 6 - \cancel{6} - 12a - 4b = 0$$

$$V_2, V_3, V_4 = 0 \Rightarrow 12a - 4b + 0 + 2(4b - 12a) = 0$$



r es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$

$\text{Dim}(\mathbb{R}^2) = 2$

$\text{Dim}(r) = 1$

$\text{Base}_r = \{(1,1)\}$

Un vector pertenece a r sólo si es combinación lineal de (1,1), sólo si el rango de $((1,1); v) = 1$, sólo si el determinante de esa matriz es "0"

$$\mathbb{R}^2 \quad rg\begin{pmatrix} 1 & v_1 \\ 1 & v_2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{vmatrix} = 0 \quad \boxed{y - x = 0} \rightarrow \text{Ecuación de } F \text{ (subespacio)}$$

F es espacio vectorial

$v = \lambda_1 , v_1 + \lambda_2 v_2 \rightarrow$ Pertenece a F

$0 \in F$

$\forall \; v_1 \; v_2 \in F \Rightarrow B_F$

DIMENSIÓN DE UN SUBESPACIO VECTORIAL

Sea $F \subset V \Rightarrow 0 \leq \text{Dim}(S) > \text{Dim}(V)$

• PROPOSICIÓN.

S subespacio vectorial de V. Los vectores de la base "S" son menores que los de la base V
$\text{Dim}(S) \leq \text{Dim}(V)$

$\bar{0} \in S$

$\lambda_1 , v_1 + \dots \lambda_n , v_n \in S$

$v_1 \cdot v_1 \in S$

$$A = \left(\underbrace{v_1 , v_2 \dots v_r}_{\text{Es base de } S} , w \right)$$

$S = \{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n / AX = 0\}$

$$\boxed{\text{Dim}(S) = \text{Dim}(V) - \text{rang}(A)}$$

COMPROBACIÓN.

$\mathcal{L}[(1,1,1)\ (2,2,2)]$ – Es subespacio vectorial que está dentro de un espacio vectorial de orden 3

$\text{Dim}(\mathcal{L}) = rg[(1,1,1)\ (2,2,2)] = 1$

$\text{Dim}(S) = 1 \rightarrow$ Porque sólo hay 1 Linealmente Independiente.

$\text{Base}_{\mathcal{L}} = \{(1,1,1)\}$

$$A\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y \\ 1 & z \end{pmatrix}$$

Rang $(A) \leq 2$ sólo si un menor (m) es igual a 0

Uno de estos elementos (x, y, z) pertenecen a $B_{\mathcal{L}}$ si (x, y, z) es combinación lineal de 1

• Ecuaciones - ¿Cuántas son?

$\text{Dim}(S) = \boxed{\text{Dim}(V)} - rg(A)$

Es $\mathbb{R}^3$ y por eso su dimensión es 3

$1 = 3 - rg(A)$

$1 = 3 - n^{\circ}$ ecuaciones

$$A\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y \\ 1 & z \end{pmatrix} \rightarrow$$

→ Calcular 2 menores de orden 2. Porque sólo necesito 2 ecuaciones.

$\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{vmatrix} = 0$ sólo si $\boxed{y - x = 0}$

$\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & z \end{vmatrix} = z - x = 0$ sólo si $\boxed{z - x = 0}$

• Hallar Base de estas ecuaciones.

$y - x = 0$ } Ecuaciones de S

$z = \lambda_3$

4. Sean $v_1 (1, 4, -5, 2)$ $v_2 = (1, 2, -3, 1)$ $v_3 (3, 2, x, y)$; $\mathbb{R}^4$

b) Encuentre la ecuación de dicho subespacio.

Base subespacio $\{ v_1, v_2 \}$

$\text{Dim } S = 2$

$V = \mathbb{R}^4 \rightarrow \text{Dim } V = 4$

$$\text{Dim } S = \text{Dim } V - \text{nº ecuaciones}$$

$$2 = 4 - x$$

$$x = 4 - 2 = \boxed{x = 2}$$

$Rg (v_1, v_2, w) = Rg\ 2$

- todos los menores de orden 3 = 0

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 4 & 2 & y \\ -5 & -3 & z \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 4 & 2 & y \\ -5 & -3 & z \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 4 & 2 & y \\ 2 & 1 & z \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 4 & 2 & y \\ -5 & -3 & z \end{vmatrix} = 2z - 12x - 5y + 10x + 3y - 4z = 0$$

$$\boxed{-2 \quad -2y - 2z = 0}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 4 & 2 & y \\ 2 & 1 & t \end{vmatrix} = 2t + 2y + 4x - 4x - y - 4t = 0$$

$$\boxed{y - 2t = 0}$$

1) $S \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = k + 1 ;\ k^2 x + y + z = 0 \}$

- El vector 0 tiene que estar para que sea un subespacio

$$\begin{cases} 0 = k + 1 \rightarrow \boxed{k = -1} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

- $\text{Dim } (S) = \text{Dim } (V) - \text{nº ecuación}$

$$\begin{cases} x = -\lambda - \alpha \\ y \ldots \end{cases} \qquad x = \lambda(-1) + \alpha(-1) \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ \ldots \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \ldots \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$B_S = \{ (-1, 1, 0) \ (-1, 0, 1) \}$

2.b)

$v_1 (1,2,3,1)$ $\qquad$ $v_2 = (3,1,2,3)$

Dim S = Dim(v) − nº ecuaciones

$2 = 4 - \boxed{2}$

• Buscar 2 ecuaciones:

- Yo sé que v_1, v_2 son LI. Entonces si meto un vector más (v_1, v_2, v_x) serán L.D. Entonces cualquier $M_3 = 0$

$$A \begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 2 & z \\ 1 & 3 & t \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{El Rang}(A) = 2 \text{ sí sólo si todos los} \\ \text{menores de orden 3} = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow z + 9y + 4x - 3x - 2y - 6z = 0$$

$$x + 7y - 5z = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & y \\ 3 & 2 & z \\ 1 & 3 & t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4t + z + 9y - 2y - 3t - 6z = 0$$

$$7y - 5z + t = 0$$

$$S \left\{ \begin{array}{l} x + 7y - 5z = 0 \\ 7y - 5z + t = 0 \end{array} \right.$$

3. Halle la dim y una B_S por el sistema $\left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ 2y - z = 0 \end{array} \right.$

Dim(S) = Dim(v) − nº ecuac

$\boxed{1} = 3 - 2$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 0 \\ 2y - z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = \lambda \\ x = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{array} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$B_S = \{(-1, 1, 2)\}$

12. Dado el sistema Generador $\{(2,1,0,1)(a,0,1,-1)(1,1,-1,2)\}$

• Halla la dimensión del ...

$$\begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \dots \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 - 0 - 2 + a = -1 + a$$

• Si $-1 + a \neq 0 \Rightarrow$ Rang(A) = 3

Si $a \neq 1$ el Rango $(A) = 3$. Entonces son 3 vectores y Dim $= 3$

Si $a = 1$ el $Rg(A) = 2$. Por $F_1 = F_2 + F_3$ entonces son L.D.

$$B_S = (2, 1, 0, 1)\ (1, 0, 1, -1)$$

$$\text{Dim}(S) = \text{Dim}(V) - \text{nº ecuacion}$$

$$2 = 4 - \boxed{2}$$

$(v_1, v_2, w) \to$ L.D $\to Rg(A) = 2 \to$ todos los m de ord 3 $= 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = x - z - 2y$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} = -x - t + 3y$$

$$\begin{cases} x - z - 2y = 0 \\ -x - t + 3y = 0 \end{cases}$$

PARA $\boxed{a = 0}$

$$B_S = \{(2, 1, 0, 1)\ (0, 0, 1, -1)\ (1, 1, -1, 2)\}$$

$$\text{Dim}(S) = \text{Dim}(V) - \text{nº ecuacio}$$

$$3 = 4 - \boxed{1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & -1 & z \\ 1 & -1 & 2 & t \end{pmatrix} = Rg(A) < 3$$

· todos los menores de ord $4 = 0$

$$\downarrow$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \end{vmatrix}$$

$f(\bar{x}) = A(\bar{x})$

Ej: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, \; 3x_1 - 2x_2)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ej 1) : Pg 6

$$A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{f(\bar{x}) = \underset{\text{autovalor.}}{\lambda} \cdot \bar{x}} \to \text{autovector}$$

Sea $\bar{x}$ ~~autovector~~ autovector con λ autovalor asociado, significa que $f(\bar{x}) = \lambda \cdot \bar{x}$ y esta función a su vez como $f(x)$ es una aplicación lineal es igual a $A \cdot \bar{x}$

$$A \cdot \bar{x} = f(x) = \lambda \cdot \bar{x} \Rightarrow A\bar{x} = \lambda\bar{x} = \lambda\bar{x}$$

$$\Rightarrow A\bar{x} - \lambda\bar{x} = 0 \Rightarrow (A - \lambda \cdot I)\bar{x} = \bar{0}$$

$I \to$ MATRIZ IDENTIDAD.

$\Rightarrow$ Se ha convertido en un "sistema de ecuaciones lineal Homogeneo"

Estos sistemas siempre tienen solución pero $\bar{x}$ era distinto de "0". Así que tiene infinitas soluciones $\Rightarrow$ El rango de $(A \cdot \lambda \cdot I)$ tiene que ser menor al número de las incognitas. $\mathrm{Rg}(A \cdot \lambda \cdot I) > n$

$$\boxed{\text{El det } A - (\lambda \cdot I) = 0}$$

* CALCULO DE AUTOVALORES :

1) RESTAR λ en la diagonal ~~paralela~~ principal A

2) Hacemos el determinante $\to$ (Sale un polinomio en λ que se llama "polinomio característico"

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$

$\ldots + 4 - \lambda = \ldots + 4x^2 - 5x + 2 = 0$ ... $(4 - 4\lambda + \lambda^2)$

	-1	4	-5	2
2		-2	1	-2
	-1	2	-1	0
1		-1	1	
	-1	-1	0	
1		-1		
	-1	0		

$\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = 1$

Calculo de autovectores.

Para calcular los autovalores habrá que resolver con cada λ la ecuación del sistema de ecuaciones.

$$(A - \lambda I)\bar{x} = 0 \rightarrow \text{infinitas soluciones.}$$

• ~~Propiedades~~ Las infinitas soluciones ~~son un~~ forman un subespacio vectorial de dimension $n - \mathbb{R}^n$

$\boxed{\text{La traza de la matriz es la suma de los elementos de la diagonal principal.}}$

- Si A es triangular, los autovectores serán los elementos de la diagonal principal.
  • Si la matriz es diagonal los ~~elementos~~ autovalores son los elementos de la Diagonal Principal.

- Si el det (A) = 0 → al menos uno de los autovalores es "0"

• Teorema de la existencia de la matriz semejante.
↳ Cuando A es diagonizable.

$\int$ es diagonizable ⟷ existe una base de ~~[illegible]~~ autovectores.

Si son los autovectores asociados en cada λ

Para la práctica.

1) Calculo los autovalores de A

~~2) Calculo de las dimensiones de cada subespacio vectorial de autovalores si Σ~~

2) Calculo $\text{Dim}\left(L(\lambda_1) \right) = n - rg(A - \lambda \cdot I)$

3) Sumo todo lo que me de y si

- El resultado es > 3 es diag
- El resultado es < 3 no es diag

Porque casi siempre el Rag de la A es 3

4) Si es diagonalizable, se calcula la base de $L(\lambda_1)$ {resolviendo el sistema $(A - \lambda I)\bar{x} = \bar{0}$ como hacíamos en el tema de subespacio}

Seguimos Ej 1.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \boxed{n=3}$$

Paso 1 (ya hecho) $= \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1$ (doble)

2) * $\lambda_1 = 2$: $\dim\left(L(\lambda_1) \right) = 3 - rg \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$= 3 - 2 = \boxed{1} \rightarrow$ 1 autovector en la base

Este determ tiene que ser 0 porque en el paso anterior he cogido que el det es "0" y $\lambda = 2$.

* $\lambda_2 = 1$: $\dim\left(L(\lambda_2) \right) = 3 - rg \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 1 - 1 + 1 - 1 - 1 = 2 - 2 \ldots$

• Como sólo me pide el 1 vector. Calculo el de la base $\lambda_1 = 2$

$$(A - \lambda I)\bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{\lambda = 2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Nos quedamos con el M que hemos utilizado para el rango de tal manera que nos quedamos con las incógnitas que sí y la otra se pasa al otro lado.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -x \quad - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y = z \\ -x = z \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = -z}$$

Pongo a la de la derecha

$$2z + y = z = \boxed{y = -z}$$

$$\begin{cases} x = -\alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad \boxed{B = \{(-1, 1, 1)\}}$$

autovector asociado de λ.

2) Dada la aplicación Lin $f(x,y,z) = (2x + 2y + z,\ x + 3y + z,\ x + 2y + 2)$ cuya matriz es A, encuentre una matriz diagonizable semejante a A.

$$A \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 + (3-\lambda) + 2 + 2 - (3-\lambda) - 2 - (2\cdot(2-\lambda)) =$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)^2 + \cancel{(3-\lambda)} + 2\,\cancel{(-3+\lambda)} - [2\cdot(2-\lambda)]$$

$$= (2-\lambda)^2 + 2 - 4 + 2\lambda = (2-\lambda)^2 - 2 + 2\lambda$$

	-1	7	-11	5
1		-1	6	-5
	-1	6	-5	0
1		-1	+5	
	-1	+5	0	
5		-5		
	-1	0		

$\lambda_1 = 1$ (doble)

$\lambda_2 = 5$

$* \ \lambda_1 = 1$

$$n - rg \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 3 - 1 = \boxed{2}$$

$* \ \lambda_2 = 5$

$$n - rg \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 3 - 2 = \boxed{1}$$

$2 + 1 = 3$

SI es diagonalizable.

$* \ \lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow x + 2y + z = 0$$

$$x = -2y - z$$

$$\begin{cases} x = -2\alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

$$B = \{(-2, 1, 0)(-1, 0, -1)\}$$

ALGEBRA LINEAL.

5) $\{ x_1 = a \; ; \; x_2 = a+b \; ; \; x_3 = c \; ; \; x_4 = b \} = S$

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline x_1 = & (1 & 0 & 0) \\ x_2 = & (1 & 1 & 0) \\ x_3 = & (0 & 0 & 1) \\ x_4 = & (0 & 1 & 0) \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow Rg = 3$$

↳ son los 3 LI

$$B_S = \{ (1,1,0,0) \; (0,1,0,1) \; (0,0,1,0) \}$$

b) $(a, a+b, c, b) = (1, 2, 0, 1)$

$$\begin{cases} 1 = a & \Rightarrow \boxed{a=1} \\ 2 = a+b \; ; & 1+1 = 2 \Rightarrow \boxed{b=1} \\ 0 = c \; ; & \boxed{c=1} \\ 1 = b \; ; & \boxed{b=1} \end{cases}$$

* Si esta ecuación no coincidiera, sería que este vector no se encuentra dentro del subespacio.

6) obtener una base de $\mathbb{R}^4 \rightarrow 2x_1 - 3x_3 + x_4 = 0$

$-2x_1 + 3x_3 = x_4$

$$\begin{cases} x_1 = \beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \lambda \\ x_4 = -2\beta + 3\lambda \end{cases}$$

Para $\beta = 1$:

$x_1 = (1, 0, 0, -2)$

Para $\alpha = 1$

$x_2 = (0, 1, 0, 0)$

Para $\lambda = 1$

$x_3 = (0, 0, 1, 3)$

Rango = 3

7) $\{(0,-1,2,-1)\ (a,-1,0,1)\ (1,-1,b,0)\}$

$$A=\begin{pmatrix}0 & a & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 2 & 0 & b\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}0 & a & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix} = -2a+2+a\cdot 1 = -2a+2+a$$

$$= -a+2 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

$$\mathrm{Dim}_S = Rg(A) = 2 \qquad \begin{vmatrix}-1 & -1 & -1\\ 2 & 0 & b\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix} = b-2+b = 2b = 2 \Rightarrow \boxed{b=1}$$

* Si $a=2$ y $b=1$ la matriz $=0$
o sea q $Rg=2$

$$\mathrm{Dim}\ S = \mathrm{Dim}\ V - n^{\circ}\ \text{ecuaciones}$$
$$2 = 4 - x \Rightarrow \boxed{x=2}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 2 & x\\ -1 & -1 & y\\ 2 & 0 & z\\ -1 & 1 & t\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 2 & x\\ -1 & -1 & y\\ 2 & 0 & z\end{vmatrix} = \boxed{4y+2x+2z=0}$$

$$\begin{vmatrix}-1 & -1 & y\\ 2 & 0 & z\\ -1 & 1 & t\end{vmatrix} = z+2y+2t+z = \boxed{2y+2z+2t=0}$$

9) Dim, Base y ecuaciones de $\{(x_3+x_2, x_2, x_3, 2x_3)\}$ $\boxed{\begin{matrix}x_3=a\\ x_2=b\end{matrix}}$

$S=(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x=a+b,\ y=a,\ z=b,\ t=2b)$

$x=a+b$
$y=a$
$z=b$
$t=2b$

$$A\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix} \qquad ry(A)=2$$

$B(1,1,0,0)\ (1,0,1,2)$

8) $\begin{cases} ax + y - 2z = 0 \\ x + ay - 2z = b \end{cases}$ $\mathbb{R}^3$ • Dimensión 2 → Calcular = a, b

$\boxed{b = 0}$ → Porque los subespacio $= 0$

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & -2 \\ 1 & a & -2 \end{bmatrix} =$$

$\text{Dim } S = 3 - rg(A)$

$3 - rg(A) = 2 \Rightarrow Rg(A) = 1$

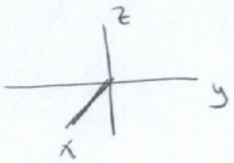
$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = \pm 1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ a & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2 + 2a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

Solución $= \boxed{a = 1}$ Para que se me anulen los 2 a la vez

11)

a) si pero forman el mismo espacio vectorial.



Así se representa (x, y, z)

b) $$A \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1/5 \\ -5 & 0 & 5 & \cancel{-1} \\ 0 & 1 & 2 & 1/5 \end{bmatrix} = rg(A)$$

$F_1 + F_2 = 5F_4 \Rightarrow$ Así que $Rg(A) = 2$

$y = -5x$ $\beta = 1$

5) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2b & 3 \end{bmatrix}$ $a, b, \in \mathbb{R}$, calcule a y b para que sea diagonalizable

$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2b & 3 \end{bmatrix}$ * como es triangular $= 0$

$\boxed{\lambda_1 = a \, , \, \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = 3}$

Esto no hace falta xq es triangular

$\begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1\lambda & 0 \\ 0 & 2b & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda) = 0$

A LA PROPIEDAD 2 (PÁGINA 8) IMPLICA LA SIGUIENTE PROPOSICIÓN:

PROPOSICIÓN: Si los autovalores de A son distintos, la matriz es diagonalizable

APUNTAR DONDE LOS APUNTES

Si a es distinto a -1 y $3 \Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \Rightarrow$ A es diagonalizable.

* Si $a = -1$

$\lambda_1 = -1$ (doble), $\lambda_2 = 3$

¿$Dim(L(\lambda_1)) + Dim(L(\lambda_2)) = 3$?

$L(\lambda_1) = \left\{ (x, y, z \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 2b & 3-\lambda \end{bmatrix}$ sustituyo $a = -1$

$Dim(L(\lambda_1)) = 3 - rg = 3 - 2 = 1$

$Dim(L(\lambda_2)) = 3 - rg = 3 - 2 = 1$

no es diagonalizable

$Dim(L(\lambda_1)) + Dim(L(\lambda_2)) = 1 + 1 = 2 \neq 3$ NO

▷ continuación 5)

* si $a=3$ $\quad \lambda_1 = 3$ (doble) $\quad \lambda_2 = -1$.

$$rg(A-\lambda_1 I) = rg\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2b & b \end{bmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } b=0 \\ \boxed{2 \quad \text{si } b\neq 0} \end{cases}$$

sustituyo $A-\lambda I$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2b \end{vmatrix}$$

* si $a=3$ y $b\neq 0 \Rightarrow$ Diagonalizable

* si $a=3$ y $b=0 \Rightarrow$ No Diagonalizable

* si $a\neq -1, 3 \Rightarrow$ 3 diferentes $\lambda \Rightarrow$ Diagonalizable.

3 opciones.

~~14) Dada la aplicación lineal $f(x,y,z) = (x-y\ 2z, \ -y\ 2x\ y\ z)$,~~

14) Dada la aplicación lineal $f(x_1,x_2,x_3) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

A) Averigua si $\lambda = -1$ es un autovalor a dicha aplicación.

B) Halle una base del subespacio de ~~autovalo~~ autovectores asociado a dicho autovalor

A) $f(\vec{v}) = \lambda\cdot\vec{v} \rightarrow \boxed{|A-\lambda I| = 0}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Sí}, \ \lambda = -1 \text{ es autovalor de } A.$$

$-2x \ -4y = +z$

$x + 2y = -3z \Rightarrow \boxed{y = -5z}$

multiplico $x \ -2$ y me quito x al restar ambas

$x = -2y - 3z = 10z - 3z = \boxed{7z}$

$$\begin{cases} y = 7\alpha \\ y = 5\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \qquad B = \{(7, -5, 1)\}$$

TEORÍA

Calcular la potencia (n) de una matriz (A)

(A^n).

Pero si A es diagonalizable, $A = PDP^{-1}$

$A^2 = A \cdot A = PD\cancel{P^{-1}} \cdot \cancel{P}DP^{-1} = P \cdot D^2 \cdot P^{-1}$

$A^3 = A \cdot A \cdot A = P \cdot D^2 \cancel{P^{-1}} \cdot \cancel{P} D P^{-1} = P \cdot D^3 \cdot P^{-1}$

$A^n = A \cdot \overbrace{\ldots}^{n \text{ veces}} = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$

$$\boxed{A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}}$$

→ sí hay que hacer el producto.

$$D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 9)

Sea $A \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Estudie si es diagonalizable y si lo es obtenga la matriz de Paso (P) que la diagonaliza. y calcule A^{30}.

continuación a)

$* \lambda = 2$

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -y + 2z = 0 & \rightarrow \boxed{y=0} \\ z = 0 & \rightarrow \boxed{z=0} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad B = \{(1,0,0)\}$$

$* \lambda_2 = 1$

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 0 & \Rightarrow \boxed{x=y} \\ 2z = 0 & \rightarrow \boxed{z=0} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y = \alpha \\ y = \alpha \\ z = 0 \end{cases} \qquad B\{(1,1,0)\}$$

$* \lambda_3 = 3 \qquad (A - \lambda_3 I) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x - y + 3z = 0 & \Rightarrow -y + 3z = x \Rightarrow -y + 3y = x \Rightarrow \boxed{2y = x} \\ -2y + 2z = 0 & \rightarrow \cancel{2}y = -\cancel{2}z \Rightarrow \boxed{y=z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \alpha \end{cases} \qquad B\{(2,1,1)\} \qquad \boxed{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ \ldots \end{bmatrix}$$

OBSERVACIONES IMPORTANTES - RECORDATORIO ; PRÁCTICO.

2º→• Si la matriz es triangular, los autovectores son los elementos de la diagonal principal.

3º→• Si los elementos (AUTOVALORES) son distintos ⇒ A diagonalizable.

1º→• Si A es simetrica $(A = A^t)$ ⇒ A es diagonizable.

- AUTOVECTORES siempre distintos al vector 0 y nunca iguales o proporcionales entre sí.

- Si la matriz no es invertida y sale algún autovalor doble hay que mirar si es diagonizable.

---

12) Sea $A = \begin{bmatrix} -1 & a & 2 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & c & -2 \end{bmatrix}$ de la que se sabe que tiene $\lambda_1 = 1$ como autovalor. y $v(0, -2, 2)$ autovect

a) Calcule los valores a, b, c

b) Halle si es posible la matriz diagonizable semejante para los valores obtenidos en el apartado anterior.

a)
$$\begin{bmatrix} -1 & a & 2 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & c & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2a + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2} \\ -2b = -2 \Rightarrow \boxed{b = 1} \\ -2c - 4 = 2 \Rightarrow \boxed{c = -3} \end{cases}$$

8. Dada la aplicación lineal $f(x,y,z) = (ay+z, 4z, z)$, justifique razonadamente si existe algún valor de a para que sea diagonizable.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ → Como es triangular, sus autovalores son los de la diagonal principal.

$\lambda_1 = 0$ (doble) $\quad \lambda_2 = 1$

$$\mathrm{Dim}(L(\lambda_1)) + \mathrm{Dim}(L(\lambda_2)) = 3$$

$$3 - Rg(A - \lambda I) + 3 - rg(A - \lambda_2 I)$$

* $rg(A - \lambda_1 I)$ = como es multiplicar x "0" se queda la matriz igual.

$$rg\begin{bmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = \boxed{a = 4}$$

- Si $a = 0$ el rango $= 1$
- Si $a \neq 0$ el rango $= 2$

* $rg(A - \lambda_2 I) = \begin{bmatrix} -1 & a & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$

- OPCIONES.

. Si $a = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Dim}(L(\lambda_1)) = 3 - 1 = 2 \\ \mathrm{Dim}(L(\lambda_2)) = 3 - 2 = 1 \end{array}\right\} 2 + 1 = 3 \Rightarrow \text{DIAGONIZABLE}$$

11.

a) Estudie si la ap. lineal es $f(x,y,z) = (2x - z, -y, 2x + 2y - z)$ tiene a $\lambda = 0$ como autovalor como autovector asociado $v = (1,0,2)$

- Para esto aplico la formula $f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$

$$f(1,0,2) = (2\cdot 1 - 2, -0, 2\cdot 1 + 2\cdot 0 - 2) = (0,0,0)$$

$= \boxed{0\cdot(1,0,2)} \to$ sí es autovalor 0 y autovector $(1,0,2)$

b) Averigüe si la aplicación del apartado es diagonalizable y, en tal caso, diagonalícela.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

TERMINAR ESTE EJERCICIO.

-10

FORMAS CUADRÁTICAS REALES.

Def.:

se define como forma cuadrática la aplicación que asigna a cada vector $x \in V$.

Es un polinomio de grado 2.

$$Q(x,y,z) = 3x^2 - 2\underbrace{xy} + yz - z^2$$

Esto también es un grado 2

xy suma el grado de x y el de y; $1+1=2$.

• MATRIZ. ¿Cómo hacerla?

$$(x,y,z)\quad \begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x & 3 & -2/2 & 0/2 \\ y & -2/2 & 0 & 1/2 \\ z & 0/2 & 1/2 & -1 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

La diagonal principal son los números elevados al cuadrado.

El resto se coloca por (x,x) (x,y) ... y como son números sin estar elevados al cuadrado, se divide entre 2

• PASAR DE MATRIZ A ECUACIÓN.

$$\cancel{Q(x)}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{Q(x\,y\,z) = 1\cdot x^2 + 8xy - 2xz + 0y^2 + 0yz + 2z^2}$$

$Q(\ldots) = x_1^2 - 5x_2^2 - x_1x_2 + 4x_1x_3$

CLASIFICACIÓN DE LAS CUADRÁTICAS.

- POSITIVA. Siempre es positiva
- SEMIDEFINIDA POSITIVA. Siempre positiva excepto alguna vez 0
- NEGATIVA. Siempre negativa
- SEMIDEFINIDA NEGATIVA. Siempre negativa excepto en alguna vez q es 0
- INDEFINIDA. Ninguna de las anteriores.

¿Como saberlo?

Si todos los m son mayores que 0 es positiva.

Si ~~todos~~ alternan el signo. Pares +, ~~los~~ Impares − ⇒ negativa

si todos son mayores de 0 menos el último que es cero. — Semidef Positiva

si ~~todos~~ alternan el signo Pares +, Impares − ⇒ Semidef Negativa

si todos son distintos de 0 y a no es definida = INDEFINIDA.

si todos son distintos de 0 y a no es semidefinida. ⇒ ~~a es~~ INDEFINIDA

Los menores principales con los que se hace son:

$$
\begin{array}{l}
1^{\circ}m \\
2^{\circ}m \\
3^{\circ}m
\end{array}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}
$$

Ej.
$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = 1^{\circ}m = 1 > 0$

$\Delta_2 = 2^{\circ}m = \begin{vmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{vmatrix} = 1/4 < 0$

2. Comprobar su forma cuadrática. $Q(x,y,z) = -x^2 + 2z^2 + 4xy + 3xz + 8yz$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 8 \\ 3 & 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3/2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3/2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = -1 < 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0$

$\Delta_3 = \Delta = 12 + 12 + 16 - 8 > 0$

- No alternan signo.
- No todos son positivos o negativos.

INDEFINIDA.

- $Q(x,y,z) = -x^2 - 5y^2 - z^2 + 4xy$

$$A \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = -1 < 0$

$= \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1 > 0$

$\Delta_3 = |A| = -1 < 0$

- Como alterna positivo + negativo − es SEMIDEFINIDA NEGATIVA

- MÉTODO DE LOS AUTOVALORES. PARA ESTUDIAR EL SIGNO.
  - Se calcula los autovalores de la matriz.
    - La matriz siempre va a ser diagonalizable porque es simétrica.
  - Se mira su signo:
    - Todos los autov positivos: DEF POSITIVA
    - Todos los autov negativos: DEF NEGATIVA.
    - Todos los aut son menores o igual a cero menos uno que puede ser 0 = SEMIDEF NEGAT
    - Todos mayores o iguales a cero aunque alguno puede ser 0 = SEMIDEF POSITIV
    - Unos autovalores ≥ 0 y otros ≤ 0 = INDEFINIDA.

Ej: $Q(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz$ $\qquad \lambda_1 = -1, \; \lambda_2 = -2, \; \lambda_3 = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 2 - \lambda^3 + 3\lambda = 0$

	+1	-1	-2
-1			
	+1	2	0

1. Estudie, según los valores de a, el signo de la forma cuadrática siguiente.

$$Q(x,y,z) = ax^2 + y^2 + z^2 + 2yz$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \Delta_1 = a \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a \quad \Delta_3 = |A| = a - a = 0$$

Si $a > 0$ SEMIDEF POSITIVA
$\Delta_1 > 0$ $\Delta_2 > 0$ $\Delta_3 = 0$

Si $a < 0$ INDEFINIDA
$\Delta_1 < 0$ $\Delta_2 < 0$ $\Delta_3 = 0$

Si $a = 0$
$\Delta_1 = 0$ $\Delta_2 = 0$ $\Delta_3 = 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 + \lambda = 0$$

$$\lambda\left(-(1-\lambda)^2 + 1\right) = 0$$

$\boxed{\lambda_1 = 0}$

$-(1-\lambda)^2 + 1 = 0$

$\cancel{-1} + 2\lambda - \lambda^2 \cancel{+1} = 0$

$\lambda(2-\lambda) = 0$ $\boxed{\lambda_2 = 0}$ $\boxed{\lambda_3 = +2}$

SEMIDEFINIDA POSITIVA

T.4 CÁLCULO DIFERENCIAL

MAGNITUDES VALORADAS POR UNA FUNCIÓN.

$\boxed{\text{Derivada} = \text{Variación}}$

- Funciones reales de variables reales $\rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Funciones reales de "n" variables $\rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

• Forma explícita: Las variables están despejadas. $y = x^2$

• Forma Implícita: Las variables no están despejadas: $x^2 + y^2 = 4$

• Ecuación de la circunferencia.

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

Dominio: Son las "x" para las que existe función; $y = \sqrt{x} \Rightarrow D(f)[0, +\infty)$

$y = \ln(x+y)$

$D(f)\ \cancel{[\mathbb{R}+\infty)}$

$\{(x;y) \in \mathbb{R} \Rightarrow (x+y) \geqslant 1$

Variación de f cuando pasamos "a" a "a+h"

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - (a)} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \Rightarrow \lim \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \boxed{f'(a)}$$

$\boxed{\text{□ LA VARIACIÓN INSTANTÁNEA ES LA DERIVADA.}}$

• Estudiar la tabla de derivadas → Las TRIGONOMÉTRICAS NO

Si $f'(a) > 0$ = CRECIENTE   si $f'(a) < 0$ = DECRECIENTE.

Si vuelvo a derivar la $f'(a)$ hago la segunda derivada.

* Tendencia local: Acelerada o Decelerada.

$f' > 0 \begin{cases} f'' > 0 & \text{Creciente acelerada} \quad \cup \to J \\ f'' < 0 & \text{Creciente decelerada} \quad \cap \to \Gamma \end{cases}$

$f' < 0 \begin{cases} f'' \geq 0 & \text{decreciente acelerada.} \longrightarrow \cup \to (\\ f'' < 0 & \text{decreciente decelerado.} \longrightarrow \cap \to) \end{cases}$

Ej: $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5$

$f'(x) = 3 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 0 \Rightarrow 9x^2 - 4x$

$f(x) = e^{x^3+2}$

$f'(x) = e^{x^3+2} \cdot 3x^2$

$f(x) = \dfrac{x+5}{3x^2} = \dfrac{1 \cdot (3x^2 - 5) - 6x(x+5)}{(3x^2 - 2)^2}$

$f(x) = (3x - 5)^3 \cdot \ln(2x)$

$f'(x) = 3(3x - 5) \cdot \ln(2x) + (3x - 5)^3 \cdot \dfrac{2}{2x}$

* Necesito dar su dirección para moverme

Tomamos los vectores de la Base Canonica. de $\mathbb{R}^n$

$\bar{e}_1 = (1, 0, 0 \ldots, 0)$

$\bar{a} + \lambda \bar{e}_1 = (a_1, a_2 \ldots a_n) + (\lambda, 0 \ldots 0)$

$= (\boxed{a \cdot \lambda,} a_2, a_3 \ldots a_n)$

$\uparrow x_1$

$\hookrightarrow$ El limite sólo afecta al principio, es decir, donde esta λ.

· Derivas f tomando x_1 como la única variable y $x_2 \ldots x_n$ como constantes.

$\frac{\partial f}{\partial x_2} \rightarrow$ DERIVADA PARCIAL.

Ej: $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_2$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) = 6x_1$

$\frac{\partial f}{\partial x_2} = (\bar{x}) = 0 + 2$

$f(x, y) = e^{x^2} + 3y^5$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x^2} \cdot 2x + 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} f(x, y) = 0 + 15y^4$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + \frac{1}{y}$

$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 5y^3$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x - 2y + 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} f(x, y) = 0 - 2y + 15y^2$

EJERCICIOS.

1) $f(x,y,z) = x^3 - 2xy^2 + 3xz - y^3 + 2z^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2y^2 + 3z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4xy - 3y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3x + 4z$$

2) $f(x,y) = e^{2xy}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{2xy} \cdot 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{2xy} \cdot 2x$$

3) $f(x,y) = \frac{2x-1}{y+3}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2 \cdot (y+3) - 0(2x-1)}{(y+3)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{0(y+3) - 1(2x-1)}{(y+3)^2}$$

VECTOR GRADIENTE DE LA FUNCIÓN (∇)

Comprueba los siguientes resultados.

a) $\nabla f(1,1,1) = (2, -7, -1)$ siendo $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^3 = 3x_1 x_2^2 - x_1x_2x_3$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 6x_1^2 - 3x_2^2 - x_2 x_3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 - 6x_1x_2 - x_1 - x_3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 - 0 - x_1 - x_2$$

$$\nabla f(x_1 x_2, x_3) = (6x_1^2 - 3x_2^2 - x_2 x_3), (-6x_1 - x_2 - x_1, -x_3), (-x_1 - x_2)$$

$$\nabla f(1,1,1) = (6, 3 -1, 2)$$

EJERCICIO CÁLCULO DE PRIMITIVAS.

$$\int f(x)\, f'(x)\, dx = \frac{f(x)^2}{2} + C$$

$$\int f(x)^n\, f'(x)\, dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C$$

Poner en la tabla.

1) $\int \ln(x^2) \cdot dx$

$u = \ln(x^2) \rightarrow du = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$

$dv = 1 \rightarrow v = \int 1\, dx = x$

2) $\int \frac{\ln \sqrt{x}}{x}\, dx$

$\ln a^b = b \cdot \ln a$

$$\int \ln \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \int \ln (x^{1/2}) \cdot \frac{1}{x}\, dx = \int \frac{1}{2} \ln x\, \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= \int \ln x \cdot \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{2}\, \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

6) $\int x^3 e^{-x^2}\, dx$

$$\int e^{-x^2} \cdot x^3\, dx = \int \underbrace{(e^{-x^2} \cdot x)}_{v} \cdot \underbrace{x^2}_{du}\, dx$$

$u = x^2 \longrightarrow du = 2x \longrightarrow$ siempre elegir un número exponencial

$dv = e^{-x^2} \cdot x \longrightarrow v = \frac{1}{-2} \int e^{-x^2} \cdot 2x\, dx = \frac{1}{-2}\, e^{-x^2}$

$$= x^2 \cdot \frac{1}{-2}\, e^{-x^2} - \frac{1}{2} \int e^{-x^2} \cdot 2x\, dx = \boxed{x^2\, \frac{1}{-2} e^{-x^2} - \frac{1}{2}\, e^{-x^2} + C}$$

10) $\int \ln(2x - 1)\, dx$ siempre que haya una función como necesito 2. lo multiplico por 1.

11) $\int (x^2+x-1)\, e^x\, dx$

$u = x^2+x-1 \longrightarrow du = 2x+1$

$dv = e^x \longrightarrow v = \int e^x dx = e^x$

$\int (x^2+x-1)\, e^x\, dx = (x^2+x-1)\cdot e^x - \int e^x (2x+1)\, dx =$

$u = 2x+1 \longrightarrow du = 2$

$dv = e^x \longrightarrow v = \int e^x dx = e^x$

$= (x^2+x-1)e^x - \left[(2x+1)e^x - \int e^x\, 2dx\right] =$

$= \boxed{(x^2+x-1)e^x - \left[(2x+1)e^x - 2e^x\right] + C}$

Integración de funciones Racionales.

El Grado de P tiene que ser SIEMPRE menor a Q

- Si $P < Q$ se resuelve $\frac{P(x)}{Q(x)}$
- Si $P \geq Q$ se resuelve dividiendo, por la teoría de la división

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \underset{\text{Cociente}}{C(x)} + \frac{\overset{\text{Resto}}{R(x)}}{Q(x)} = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \underbrace{\int C(x)\, dx}_{\text{Integral}} + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

Descomposición en suma de factores simples.

1) $Q(x)$ tiene raíces reales simples: $Q(x) = (x-a)(x-b)(x-c) =$

$$\text{Ej: } \int \frac{x-3}{x^2-1}\,dx$$

$$\boxed{= \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{A}{x-a}\,dx \int \frac{B}{x-b}\,dx \int \frac{C}{x-c}\,dx}$$

A, B, C : constantes que calculas.

$$= A\ln|x-a| + B\ln|x-b| + C\ln|x-c|$$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x \pm 1$$

$$Q(x) = (x+1)(x-1)$$

$$\frac{x-3}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow \underline{x-3 = A(x-1)+B(x+1)}$$

Porque es el numerador q tenemos.

· Doy valores para la ecuación. Si damos los mismos de antes es más rápido.

· $x = 1 \Rightarrow 1-3 = A(1-1) + B(1+1) \Rightarrow -2 = 2B \Rightarrow \boxed{B = -1}$

· $x = -1 \Rightarrow -1-3 = A(-1-1) + B(-1+1) \Rightarrow -4 = -2A \Rightarrow \boxed{A = 2}$

· Ahora ya hago la integral.

$$\int \frac{x-3}{x^2-1}\,dx = \int \frac{2x}{x+1}\,dx + \int \frac{-1}{x-1}\,dx = \boxed{2\ln|x-1| - \ln|x-1| + C}$$

2) $Q(x)$ tiene raíces múltiples

$$\boxed{\frac{P(x)}{(x-a)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}}$$

$$= A(x+1)^2 + B(x+2)(x-1) + C(x+2)$$

numeradores.

$$\boxed{2x+1} = A(x-1)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x+2)$$

- $x = 1 \Rightarrow 2 \cdot 1 + 1 = A(1-1)^2 + B(1-1)(1+2) + C(1+2)$

$$3 = 3C \Rightarrow \boxed{C = 1}$$

- $x = -2 \Rightarrow -2 \cdot 2 + 1 = A(-2-1)^2 + B(-2-1)(-2+2) + C(-2+2)$

$$-3 = 9A \Rightarrow \boxed{A = -\frac{1}{3}}$$

Como ya no me quedan de los fáciles, doy el valor que yo quiera

- $x = 0 \Rightarrow 0 \cdot 2 + 1 = A(0-1)^2 + B(0-1)(0+2) + C(0+2) =$

$$1 = A - 2B + 2C$$

$$1 = -\frac{1}{3} - 2B + 2 \qquad \boxed{B = 1/3}$$

$$-1 + \frac{1}{3} = -2B$$

* FALTARÍA HACER LAS INTEGRALES

$$\boxed{\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \int (x-1)^{2}\,dx} \rightarrow \text{PARA PODER INTEGRAR.}$$

4. Cambio de variable.

Sólo cambio parte de la integral que no puedo integrar.

Si

$$e^x\,dx = 1\,dt$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$$

· Como lo que nos molesta la $\sqrt{\ }$ pues "t" hay que elevarlo al mínimo común múltiplo de los de la $\sqrt{\ }$

$$x = t^{mcm(2,3)} = t^6$$

$$dx = 6t^5\,dt$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{\sqrt{t^6}}{1+\sqrt[3]{t^6}} \cdot 6t^5\,dx =$$

$$= \int \frac{t^3}{1+t^2} \cdot 6t^5\,dt = 6\int \frac{t^8}{1+t^2}\,dt.$$

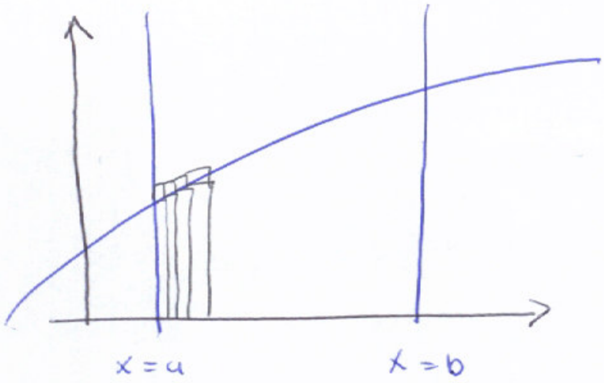
INTEGRALES DEFINIDAS (RIEMANN)

1º) Nos interesa calcular el VALOR ACUMULADO por la magnitud en un intervalo de tiempo. $[a,b]$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

Función Primitiva.

2º) Calculo del area comprendida entre la grafica de la función $f(x)$, el eje x y las rectas $x=a$; $x=b$.



Para calcular el area, hago todas las areas de rectangulos pequeños y la de los rectangulos grandes pero muy peq para que su diferencia sea pequeña.
Riman decidio hacer limite y al ser tan pequeño tienden a "0"

$$\underline{S} = \sum (\text{áreas rectángulos pequeños})$$

$$\overline{S} = \sum (\text{áreas rectángulos grandes})$$

P = PARTICIONES DE [a, b] = base de rectangulos.

$$\lim_{P \to 0} \underline{S} = \lim_{P \to 0} \overline{S} = A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

- CALCULAR DERIVADA.
- CALCULAR EL AREA.
- CALCULAR EL VALOR ADQUISITIVO

] COMO LO PUEDEN PREGUNTAR

□ REGLA DE BARROW.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

PRIMITIVA SIN CONSTANTE. PORQUE AL RESTAR SE IRÁ.

$F(x) = \int f(x)\,\boxed{dx}$ — BASE DE RECTANGULOS

$\int f'(x)\,dx = -\int f(x)\,dx \quad \int f(x)\,dx$

Ejercicio:

$$\int_0^1 e^{3x^2-2}\, x\, dx = \frac{1}{6} e^{3x^2-2} \Big|_0^1 = \frac{1}{6} e^{3\cdot 1^2-2} - \frac{1}{6} e^{3\cdot 0^2-2}$$

$$= \boxed{\frac{1}{6} e - \frac{1}{6}}$$

$$\frac{1}{6} \int e^{3x^2-2} \cdot 6x\, dx = \frac{1}{6} e^{3x^2-2}$$

13)

$$\int_0^1 \underbrace{4x}_{u}\, \underbrace{e^{x-2}}_{dv}\, dx$$

$u = 4x \longrightarrow du = 4$

$dv = e^{x-2} \longrightarrow v = \int e^{x-2}\, dx = e^{x-2}$

$$4x \cdot e^{x-2} - \int e^{x-2} \cdot 4\, dx = \boxed{4x e^{x-2} - 4e^{x-2} + C}$$

$$4x e^{x-2} - 4e^{x-2} \Big|_0^1 = \left(4\cdot 1 e^{1-2} - 4e^{1-2}\right) - \left(4\cdot 0 \cdot e^{0-2} - 4\cdot e^{0-2}\right)$$

15. $$\int_{-1}^{1} \frac{4e^{3x}}{1+e^{2x}}\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} e^x = t \\ e^x\,dx = dt \end{array}} \Longleftrightarrow x = \ln t \xrightarrow{\text{derivamos}} 1\,dx = \frac{1}{t}\,dt$$

$$\int \frac{4t^{\cancel{3}\,2}}{1+t^2}\cdot\frac{1}{\cancel{t}}\,dt = \int \frac{4t^2}{1+t^2}\,dt \Rightarrow \begin{array}{r|l} 4t^2 & t^2+1 \\ \hline -4t^2-4 & 4 \\ \hline -4 & \end{array}$$

Aplicamos la regla de la división.

$$\Rightarrow \int 4 + \frac{-4}{t^2+1}\,dt = \int 4\,dt - 4\int \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= 4t - 4\,\text{arctg}\,t \underset{\text{sustituir}}{\overset{\uparrow}{=}} \boxed{4e^x - 4\,\text{arctg}\,e^x + C}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{4e^{3x}}{1+e^{2x}}\,dx = \left(4e^x - 4\,\text{arctg}\,e^x\right|_{-1}^{1} =$$

$$= \left(4e^1 - 4\,\text{arctg}\,e^1\right) - \left(4e^{-1} - 4\,\text{arctg}\,e^{-1}\right) =$$

EJERCICIOS DE INTEGRALES DEFINIDAS.

1. $$\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx = e - \sqrt{e}$$

$$\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx \Rightarrow \int \underline{\qquad}$$

$$\frac{1}{x} = t \qquad \rightarrow \quad -\int e^t\,dt = -e^t = -e^{1/x}$$

$$-\frac{1}{x^2}\,dx = dt$$

$$\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx = \left(-e^{1/x}\right|_1^2 = -e^{1/2} + e^1 = \boxed{e - \sqrt{e}}$$

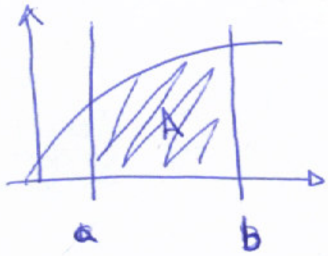
3. $$\int_0^1 (x^3+2)\,5x^2\,dx = \frac{25}{6}$$

$$\boxed{\int 5x^5 + 10x^2\,dx = 5\frac{x^6}{6} + 10\frac{x^3}{3}}$$

$$\int_0^1 5x^5 + 10x^2\,dx = \left(5\frac{x^6}{6} + 10\frac{x^3}{3}\right|_1^0 =$$

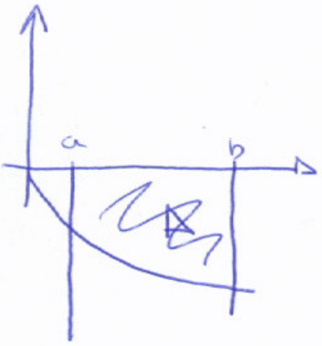
$$= \left(5\cdot\frac{1}{6} + 10\cdot\frac{1}{3}\right) - \left(5\cancel{\frac{0}{6}} + \cancel{10\frac{0}{3}}\right) = \frac{5}{6} + \frac{10}{3} = \boxed{\frac{25}{6}}$$

CÁLCULO DE ÁREAS MEDIANTE INTEGRALES DEFINIDAS.



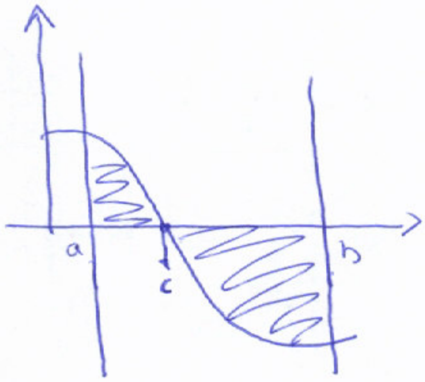
$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

ÁREA COMPRENDIDA ENTE f(x), EL EJE X, Y LAS RECTAS $x = a$; $x = b$



$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

PARA AHORRARNOS DIBUJAR, PONEMOS VALOR ABSOLUTO. $A = \int_a^b |f(x)\,dx|$



1º CALCULO EL PUNTO c. SI HAY MÁS CALCULO TODOS.

2º $\left|\int_a^c f(x)\,dx\right| + \left|\int_c^b f(x)\,dx\right| = A$

ÁREA COMPRENDIDA ENTRE f(x) PASA POR EL EJE X. LAS RECTAS ~~LLAMAS~~ $x = a$, $x = b$.

Ej. Calcular el área comprendida entre la gráfica de $f(x) = 1 - x^3$, el

• Divido la función en 2. Con el punto que acabo de sacar.

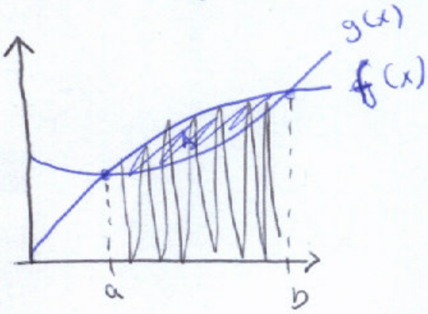
$$A = \left| \int_0^2 1 - x^3 dx \right| = \left| \int_0^1 1 - x^3 dx \right| + \left| \int_1^2 1 - x^3 dx \right| =$$

$$= \left| \left(x - \frac{x^4}{4} \right|_0^1 \right| + \left| \left(x - \frac{x^4}{4} \right|_1^2 \right| = \left| 1 - \frac{1}{4} - 0 + \frac{0^4}{4} \right| +$$

$$+ \left| 2 - \frac{2^4}{4} - 1 + \frac{1^4}{4} \right| = \frac{3}{4} + \frac{11}{4} = \boxed{\frac{14}{4}\ u^2}$$

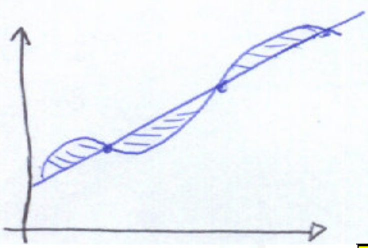
$$\left| 2 - \frac{16}{4} - 1 + \frac{1}{4} \right| = \left| 2 - 4 - 1 + \frac{1}{4} \right| = \left| \frac{-11}{4} \right|$$

2. Área comprendida entre dos gráficas.



CALCULO TODO EL AREA DEBAJO DE G(x) y F(x) y DESPUÉS LO RESTO Y ME SALE EL AREA DE "A".

$$\left| \int_a^b f(x) - g(x)\, dx \right|$$



... INTEGRAL EN TODOS LOS PUNTOS DE CORTE.

Ej Calcular el área comprendida entre:

$$y = x \; ; \; y = \frac{x^2}{4}$$

- Puntos de corte.

$$x = \frac{x^2}{4} \Rightarrow 4x = x^2 \Rightarrow \boxed{x = 4}$$

$$f(x) = \boxed{x = 0}$$

$$\left| \int_0^4 x - \frac{x^2}{4} \, dx \right| = \left| \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} \right| = \frac{4^2}{2} - \frac{4^3}{12} - \frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{12} \Bigg|$$

$$\left| \frac{16}{2} - \frac{64}{12} - 0 - 0 \right| = \left| 8 - \frac{64}{12} \right| = \left| \frac{96}{12} - \frac{64}{12} \right| = \left| \frac{32}{12} \right|$$

$$= \left| \frac{8}{3} \right| u^2$$

13. $x = 2 \; ; \; y = x \; ; \; y = \frac{1}{x}$

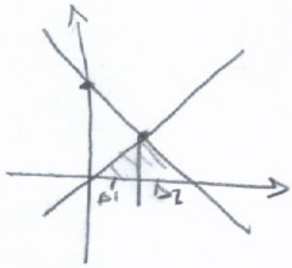
Puntos de corte.

$$x = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\boxed{x = 2}$$

$$\left| \int_1^2 x - \frac{1}{x} \, dx \right| = \left(\frac{x^2}{2} - \ln x \right|_1^2 \quad \left| \frac{2^2}{2} - \ln 2 - \frac{1}{2} - \ln 1 \right|$$

14. $y=0$; $y=x$; $x+y=4$



$y=0 \quad \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x+y=4 \Rightarrow x+0=4 \Rightarrow \boxed{x=4} \end{cases}$

$x+y=4 \Rightarrow x=4-x \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow \boxed{x=2}$

$$A_1 = \int_0^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2u^2$$

$$A_2 = \int_2^4 4-x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_2^4 = 16-8-8+2 = \boxed{2u^2}$$

$$\int_0^2 \underbrace{x-(4-x)}_{2x-4}\,dx + \int_2^4 \underbrace{x-(4-x)}_{2x-4}\,dx = \left|x^2-4x\Big|_0^2\right| + \left|(x^2-4x\Big|_2^4\right|$$

$$= |4-8| + |16-16-4+8| = |4+4=8| = 8$$

$\Downarrow$

no se puede hacer de esta forma

xq no es el area que yo quiero.